

**ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV**

**CIEĽOVÉ POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI  
A ZRUČNOSTI MATURANTOV  
Z MATEMATIKY**

**BRATISLAVA 2009**

## ÚVOD

Cieľové požiadavky z matematiky sú rozdelené na časti *Obsah* a *Požiadavky na vedomosti a zručnosti*.

Text v jednotlivých častiach vytlačený *obyčajnou kurzívou* predstavuje odvolávky, vysvetlivky a komentáre.

V každej kapitole sú v odseku *Obsah* (rozdelenom spravidla na 2 menšie časti s názvami *Pojmy* a *Vlastnosti a vzťahy*) vymenované termíny a vzťahy (vzorce, postupy, tvrdenia), ktoré má žiak ovládať. Toto ovládanie v prípade *pojmov* znamená, že žiak

- rozumie zadaniam úloh, v ktorých sa tieto pojmy vyskytujú,
- vie ich správne použiť pri formuláciách svojich odpovedí,
- vie ich stručne opísať (definovať).

V prípade *vlastností a vzťahov* ovládaním rozumieme žiakovu schopnosť vybaviť si tieto vzťahy v mysli (bez toho, aby mu bolo potrebné pripomínať konkrétnu podobu uvedeného vzťahu, postupu, či tvrdenia) a použiť ich pri riešení danej úlohy (pričom spôsob tohto použitia špecifikuje časť *Požiadavky na vedomosti a zručnosti*, o ktorej hovoríme nižšie). Pre prehľadnosť neuvádzame úplné znenie jednotlivých vzťahov so všetkými predpokladmi a podmienkami, ale len takú ich podobu, z ktorej je jasné, aké tvrdenie máme na mysli.

Pokiaľ sa v zadaniach úloh alebo otázok, ktoré má žiak riešiť alebo zodpovedať, vyskytnú pojmy, ktoré nie sú uvedené v časti *Obsah*, bude potrebné ich v texte zadania vysvetliť. Rovnako tak v prípade, že zadanie vyžaduje použitie postupu alebo vzťahu, ktorý nie je zahrnutý do časti *Obsah*, musí byť žiakovi k dispozícii opis požadovaného postupu alebo vzťahu (tento opis však nemusí byť súčasťou zadania, môže byť napríklad uvedený vo “vzorčekovníku”, ktorý bude priložený k celému súboru zadání). Výnimku z tohto pravidla predstavuje situácia, keď riešením úlohy má byť *objavenie* alebo *odvodenie* takého vzťahu, ktorý nebol uvedený v odseku *Vlastnosti a vzťahy*.

Časť *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* opisuje v každej kapitole činnosti, ktoré má byť žiak schopný správne realizovať. V texte používanú formuláciu “*žiak vie ...*” pritom chápeme v zmysle “*žiak má vedieť ...*”; podobne formulácia “*... pokiaľ (ak) žiak vie ...*” znamená “*... ak je v týchto cieľových požiadavkách uvedené, že žiak má vedieť ...*”. Teda napríklad text “*žiak vie nájsť všetky riešenia nerovnice  $f(x) \leq a$ , pokiaľ vie riešiť rovnicu  $f(x) = a$  a súčasne vie načrtnúť graf funkcie  $f$* ” (ktorý čitateľ nájde v kapitole 1.4) treba chápať tak, že na inom mieste týchto cieľových požiadaviek je špecifikované, grafy ktorých funkcií  $f$  má žiak vedieť načrtnúť, a pre ktoré funkcie  $f$  má žiak vedieť riešiť rovnicu  $f(x) = a$ . Podobnú úlohu plní odvolávka “*pozri ...*”; napríklad v texte “*žiak vie nájsť definičný obor danej funkcie (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*” táto odvolávka upozorňuje, že stupeň náročnosti, na ktorom má žiak zvládnuť určovanie definičného oboru funkcie, je daný náročnosťou rovníc a nerovníc, ktoré pri tom musí vyriešiť, pričom táto náročnosť je opísaná v časti 1.4. Odvolávka “*pozri tiež ...*” upozorňuje čitateľa, že uvedený pojem alebo činnosť sa vyskytuje aj na inom mieste tohto textu.

Žiak by mal byť schopný riešiť *úlohy komplexného charakteru*, teda úlohy, ktorých riešenie vyžaduje spojenie *nevelkého počtu* činností opísaných v týchto cieľových požiadavkách (pritom nevyklúčujeme spájanie činností opísaných v rôznych kapitolách); napr. pri riešení “*klasickej*” slovnej úlohy by mal žiak zvládnuť formuláciu príslušného problému v reči matematiky, jeho vyriešenie prístupnými matematickými prostriedkami a formuláciu odpovede opäť v reči pôvodného slovného zadania. Jednotlivé činnosti uvedené v časti *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* predstavujú teda len akési “*tehličky*” či “*základné stavebné kamene*”, pričom riešenie jedného konkrétneho zadania môže vyžadovať i použitie a spojenie viacerých takýchto “*tehličiek*”.

V snahe o ucelenosť jednotlivých kapitol uvádzame tie pojmy a zručnosti, ktoré súvisia s viacerými kapitolami, v každej z nich. Z toho istého dôvodu sú do textu zaradené i niektoré pojmy, vzťahy a činnosti, ktoré sú obsahom učiva základnej školy.

Vyznačené (zvýraznené) učivo sa v prechodnom období 2012 – 2016 nebude testovať v externej časti maturitnej skúšky.

# 1 ZÁKLADY MATEMATIKY

## 1.1 Logika a množiny

### Obsah

#### Pojmy:

výrok, axióma, definícia, hypotéza, tvrdenie, pravdivostná hodnota, logické spojky, negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, **obmena implikácie**, **obrátaná implikácia**, ekvivalencia, vyplýva, je ekvivalentné, kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve), priamy a nepriamy dôkaz, dôkaz sporom, množina, prvky množiny, podmnožina, nadmnožina, prienik, zjednotenie a rozdiel množín, Vennove diagramy, disjunktne množiny, prázdna množina, doplnok množiny, konečná a nekonečná množina, **počet prvkov množiny**.

#### Vlastnosti a vzťahy:

- Implikácia (výrok)  $A \Rightarrow B$  je ekvivalentná s implikáciou (výrokom)  $B' \Rightarrow A'$  (výrok z  $A$  vyplýva  $B$  platí práve vtedy, keď platí výrok z negácie  $B$  vyplýva negácia  $A$ ),
- výroky  $A, B$  sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$ ,
- negácia konjunkcie (disjunkcie) je disjunkcia (konjunkcia) negácií,
- implikácia  $A \Rightarrow B$  je nepravdivá práve vtedy, keď je pravdivý výrok  $A$  a nepravdivý výrok  $B$ ,
- pravdivosť zložených výrokov a negácie (“*tabuľka pravdivostných hodnôt*”),
- negácia výroku  $\forall x \in M$  platí  $V(x)$  je  $\exists x \in M$ , pre ktoré neplatí  $V(x)$ ,
- negácia výroku  $\exists x \in M$ , pre ktoré platí  $V(x)$  je  $\forall x \in M$  neplatí  $V(x)$ ,
- $A = B$  práve vtedy, keď súčasne platí  $A \subset B, B \subset A$ ,
- pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín platí  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ,
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ,  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ .

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

#### Žiak vie:

- rozlíšiť používanie logických spojok a kvantifikátorov vo vyjadrovaní sa v bežnom živote na jednej strane a v rovine zákonov, nariadení, zmlúv, návodov, matematiky na strane druhej,
- zistiť pravdivostnú hodnotu zloženého výroku (vytvoreného pomocou negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie) z pravdivostných hodnôt jednotlivých zložiek (*teda napísať pre danú situáciu príslušný riadok “tabuľky pravdivostných hodnôt”*),
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či je výrok negáciou daného výroku, vytvoriť negáciu zloženého výroku (nielen pomocou “*nie je pravda, že ...*”),
- v jednoduchých prípadoch zapísať a určiť množinu vymenovaním jej prvkov, charakteristickou vlastnosťou **alebo množinovými operáciami**,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o konečnosti či nekonečnosti danej množiny,
- opísať základné druhy dôkazov (priamy, nepriamy, sporom) a dokumentovať ich príkladmi,
- **použiť základné druhy dôkazov pri dokazovaní jednoduchých tvrdení**,
- určiť zjednotenie, prienik a rozdiel množín i doplnok množiny  $A$  (ak  $A$  je podmnožinou  $B$ ) vzhľadom na množinu  $B$  (*intervaly pozri v 1.2 Čísla, premenné a výrazy*),
- použiť vzťah pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín pri hľadaní počtu prvkov týchto množín, resp. ich prieniku alebo zjednotenia,
- pri riešení úloh o množinách použiť ako pomôcku Vennove diagramy (pre 2 – 4 množiny).

## 1.2 Čísla, premenné a výrazy

### Obsah

#### Pojmy:

konštanta, premenná, výraz, obor definície výrazu, rovnosť výrazov, hodnota výrazu, mnohočlen, stupeň mnohočlena, doplnenie do štvorca (*pre kvadratický mnohočlen*), člen mnohočlena, vynímanie pred zátvorku, úprava na súčin, krátenie výrazu, prirodzené ( $N$ ), celé ( $Z$ ), nezáporné ( $N_0$ ), záporné ( $Z^-$ ), racionálne ( $Q$ ), iracionálne ( $I$ ), reálne ( $R$ ) čísla,  $n$ -ciferné číslo, zlomky (čitateľ, menovateľ, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, zložený zlomok, hlavná zlomková čiara), desatinný rozvoj (konečný, nekonečný a periodický), číslo  $\pi$ , nekonečno, číselná os, znázorňovanie čísel, komutatívny, asociatívny a distributívny zákon, odmocnina (druhá),  $n$ -tá odmocnina, mocnina (s prirodzeným, celočíselným, **racionálnym** exponentom), exponent a základ mocniny, základ logaritmu, absolútna hodnota čísla, úmera (priama a nepriama), pomer, percento, promile, základ (*pre počítanie s percentami*), faktoriál, kombinačné číslo, desiatková sústava, dekadický zápis, interval (uzavretý, otvorený, ohraničený, neohraničený).

#### Vlastnosti a vzťahy:

- $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ ,  $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$ ,  $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ , kde  $x_1, x_2$  sú korene rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$ , ( $a \neq 0$ ),
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ,  $(a^x)^y = a^{xy}$ ,  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ,  $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ ,  $c^0 = 1$ ,  $a, b \geq 0$ ,  $c > 0$ ,  $x, y \in Z, Q$ ,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$ ,  $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$ ,  $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ , pre  $x, y \geq 0$ ,  $m, n \in N$ ,
- $\sqrt{a^2} = |a|$ ,
- $|x - a|$  je vzdialenosť obrazov čísel  $x$  a  $a$  na číselnej osi,
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ ,
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ,  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ,  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ ,  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ ,  
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ,  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ,  
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ ,  $a^{\log_a x} = x$ , pre  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ ,  $b > 0$ ,
- $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$ ,  $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ , pre  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x, y > 0$ ,
- $\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$ , pre  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ ,
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ , pre prirodzené čísla  $n$ ,  $0! = 1$ ,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , pre prirodzené čísla  $n$  a nezáporné celé čísla  $k$ , nie väčšie ako  $n$ ,
- práve racionálne čísla majú desatinný periodický rozvoj,
- $R = Q \cup I$ ,  $Q \cap I = \{ \}$ ,  $Z = N \cup Z^- \cup \{0\}$ ,  $N \subset Z \subset Q \subset R$ .

**Požiadavky na vedomosti a zručnosti**

Žiak vie:

*(čísla)*

- zaokrúhľovať čísla,
- upraviť reálne číslo na tvar  $\pm a \cdot 10^n$ , kde  $n$  je celé číslo a  $a$  číslo z intervalu  $\langle 1, 10 \rangle$ ,
- vypočítať absolútnu hodnotu reálneho čísla,
- zapísať vzdialenosť na číselnej osi pomocou absolútnej hodnoty,
- znázorňovať čísla na číselnú os, porovnávať čísla na číselnej osi, odčítat čísla z číselnej osi,
- pre konkrétne  $n$  všeobecne zapísať  $n$ -ciferné číslo,
- na približný výpočet číselných výrazov a hodnôt funkcií (vrátane  $\log_a x$ ) používať kalkulačku, pričom vie
  - upravovať číselné výrazy na tvar vhodný pre výpočet na kalkulačke,
  - zvoliť vhodný postup, aby mu vyšiel čo najpresnejší výsledok (*napr. pri približnom výpočte  $\frac{20!}{10! \cdot 10!}$* ),
- pomocou kalkulačky zistiť ostrý uhol, ktorý má danú goniometrickú hodnotu,
- porovnať dve reálne čísla na úrovni presnosti kalkulačky,
- vyjadriť zjednotenie, prienik a rozdiel konečného počtu intervalov pomocou najmenšieho počtu navzájom disjunktných intervalov, jednoprvkových množín a prázdnej množiny,

*(výrazy)*

- určiť hodnotu výrazu (*dosadiť*) "ručne" alebo pomocou kalkulačky,
- určiť obor definície výrazu (*pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
- odstrániť absolútnu hodnotu rozlišovaním vhodných prípadov (*t.j.  $|V(x)| = V(x)$  pre  $x$ , pre ktoré  $V(x) \geq 0$  a  $|V(x)| = -V(x)$  pre  $x$ , pre ktoré  $V(x) \leq 0$* ),
- doplniť kvadratický trojčlen do štvorca (*pozri tiež 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť*),
- upravovať mnohočlen na súčin vynímaním pred zátvorku a použitím vzťahov pre rozklady výrazov  $x^2 - y^2$ ,  $x^2 \pm 2xy + y^2$ ,  $ax^2 + bx + c$ ,
- použiť pri úpravách výrazov (číselných alebo výrazov s premennými) rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy*, roznásobovanie, vynímanie pred zátvorku, krátenie, úpravu zloženého zlomku na jednoduchý,

*(práca s premennou)*

- používať percentá a úmeru,
- nahradíť premennú vo výraze novým výrazom (*substitúcia, pozri tiež 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
- pri priamo závislých veličinách vie vyjadriť jednu pomocou druhej (*pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti*),
- vyjadriť neznámu zo vzorca (*pozri 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti*),
- zapísať slovný text algebraicky (*matematizácia*),
  - zapísať vzťahy (v jednoduchom texte) pomocou premenných, čísel, rovností a nerovností,
  - zapísať, vyjadriť bežné závislosti v geometrii,
  - v jednoduchých prípadoch odvodiť zo známych vzťahov niektoré nové vzťahy,
- riešiť kontextové (*slovné*) úlohy vedúce k rovniciam a nerovniciam (*pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*) a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania.

## 1.3 Teória čísel

### Obsah

*Pojmy:*

deliteľ, násobok, deliteľnosť, najväčší spoločný deliteľ (NSD), najmenší spoločný násobok (NSN), prvočíslo, zložené číslo, súdeliteľné a nesúdeliteľné čísla, zvyšok, prvočíselný rozklad, prvočiniteľ.

*Vlastnosti a vzťahy:*

- Znak deliteľnosti číslom 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zistiť bez delenia, či je dané číslo deliteľné niektorým z čísel uvedených v znakoch deliteľnosti,
- sformulovať a použiť kritériá deliteľnosti niektorými zloženými číslami, ktoré sú súčinom nesúdeliteľných čísel uvedených v znakoch deliteľnosti (napr. 6, 12, 15),
- nájsť NSN, NSD daných čísel,
- nájsť celočíselné riešenia úloh, v ktorých možno jednoduchou úvahou určiť vhodnú konečnú množinu, ktorá hľadané riešenia musí obsahovať (riešenia úlohy potom nájde preverení jednotlivých prvkov získanej konečnej množiny),
- pri riešení jednoduchých úloh využiť pravidelnosť rozloženia násobkov celých čísel na číselnej osi.

## 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

### Obsah

*Pojmy:*

rovnica, nerovnica, sústava rovníc, sústava nerovnic a ich riešenie, koeficient, koreň, koreňový činiteľ, diskriminant, doplnenie do štvorca, úprava na súčin, substitúcia, kontrola (skúška) riešenia, (ekvivalentné a neekvivalentné) úpravy rovnice a nerovnice, lineárny, kvadratický člen, koeficient pri lineárnom (kvadratickom) člene.

*Vlastnosti a vzťahy:*

- Diskriminant kvadratickej rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$  je  $D = b^2 - 4ac$ ,
- riešením kvadratickej rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$  sú  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ ,
- vzťah medzi diskriminantom a počtom (navzájom rôznych) koreňov kvadratickej rovnice,
- $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ , kde  $x_1, x_2$  sú korene rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ ,
- vzťah medzi znamienkom súčinu dvoch výrazov a znamienkom jednotlivých činiteľov.

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

(rovnice)

- nájsť všetky riešenia lineárnej rovnice  $ax + b = 0$  a kvadratickej rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$ , pričom pozná vzťah medzi koreňmi kvadratickej rovnice a koreňovými činiteľmi, počtom riešení,
- nájsť všetky riešenia, resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale  $I$  (ak sa nedá presne, tak približne s pomocou kalkulačky) rovnice  $f(x) = A$ , kde  $A \in \mathbb{R}$  a  $f$  je funkcia
  - $x^a, b^x, \log_b x$  ( $a \in \mathbb{Q}$ ,  $b$  je kladné číslo rôzne od 1),

- $|x - a|$ ,
- $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,

a vie určiť, koľko riešení má uvedená rovnica (v závislosti od čísla  $A$ , čísel  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , resp. intervalu  $I$ ),

- použitím danej substitúcie  $y = \varphi(x)$  upraviť rovnicu zapísanú v tvare  $f(\varphi(x)) = A$  na tvar  $f(y) = A$ , špeciálne vie nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale  $I$ ) rovníc
  - $f(ax + b) = A$ , kde  $f$  je funkcia  $x^a$ ,  $b^x$ ,  $\log_b x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,
  - $f(ax^2 + bx + c) = A$ , kde  $f$  je funkcia  $x^a$ ,  $b^x$ ,  $\log_b x$ ,
- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale  $I$ ) rovníc zapísaných v tvare  $f(x)g(x) = 0$ , pokiaľ vie riešiť rovnice  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = 0$ ,
- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale  $I$ ) rovníc, ktorých tvar možno upraviť na niektorý z predchádzajúcich tvarov
  - použitím úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti funkcií (*pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie*),
  - pripočítaním (špeciálne odpočítaním) a vynásobením (špeciálne vydelením) oboch strán rovnice výrazom, umocnením (špeciálne odmocnením) oboch strán rovnice,
  - odstránením absolútnej hodnoty v prípade rovníc s jednou absolútnou hodnotou (*rozlišovaním dvoch vhodných prípadov*),
 pričom vie rozhodnúť
  - či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej rovnice,
  - ktoré z koreňov rovnice, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj koreňmi pôvodnej rovnice, resp. pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych koreňov zmenšiť, o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú koreňmi pôvodnej rovnice,
- riešiť kontextové (*slovné*) úlohy vedúce k rovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania,

(*sústavy rovníc*)

- opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej a dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi (*pozri 3.2 Analytická geometria v rovine, 4.2 Súradnicová sústava v priestore*),
- nájsť všetky riešenia sústavy 2 rovníc s 2 neznámymi, ktorú možno jednoducho upraviť na tvar  $y = f(x) \wedge g(x, y) = 0$  (resp.  $x = f(y) \wedge g(x, y) = 0$ ), pokiaľ vie riešiť rovnicu  $g(x, f(x)) = 0$  (resp.  $g(f(y), y) = 0$ ),
- upravovať sústavy rovníc použitím
  - úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti elementárnych funkcií (*pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie*),
  - pripočítania (špeciálne odpočítania) a vynásobenia (špeciálne vydelenia) oboch strán rovnice výrazom,
 pričom vie rozhodnúť,
  - či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej sústavy,
  - ktoré z riešení sústavy, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj riešeniami pôvodnej sústavy, resp. pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych riešení zmenšiť, o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú riešeniami pôvodnej sústavy,

(*nerovnice a ich sústavy*)

- nájsť množinu všetkých riešení nerovnice
  - $f(x) * L$ , kde  $L$  je reálne číslo,  $*$  je jeden zo znakov nerovnosti  $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $>$ ,  $f$  je niektorá z funkcií  $(ax + b)^a$ ,  $b^x$ ,  $\log_b x$ ,  $|x - a|$ , resp. množinu všetkých riešení tejto nerovnice ležiacich v danom intervale,
  - $f(x) * L$ , kde  $f$  je niektorá z funkcií  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  a  $x$  je prvkom daného ohraničeného intervalu,

- $\frac{f(x)}{g(x)} * 0$  a  $f(x)g(x) * 0$ , pokiaľ vie riešiť nerovnice  $f(x) * 0$ ,  $g(x) * 0$ , kde  $*$  je znak nerovnosti,
- nájsť všetky riešenia nerovnic, ktorých riešenie možno postupmi uvedenými v nasledujúcej odrážke nahradiť riešením nerovnic uvedených v predchádzajúcej odrážke,
- pri riešení a úpravách nerovnic správne použiť
  - vynásobenie obidvoch strán nerovnice kladným alebo záporným číslom,
  - pripočítanie výrazu k obidvom stranám nerovnice,
- riešiť sústavu nerovnic s jednou neznámou v prípadoch, keď vie vyriešiť samostatne každú z daných nerovnic (*pozri prieniky a zjednotenia intervalov v 1.2 Čísla, premenné a výrazy*),
- vyznačiť na  $x$ -ovej osi riešenie nerovnice  $f(x) * g(x)$ , pokiaľ vie načrtnúť grafy funkcií  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,
- v rovine opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej nerovnice s dvoma neznámymi  $x, y$ , ktorú možno zapísať v tvare
  - $y * f(x)$  alebo  $x * f(y)$  (kde  $*$  je znak nerovnosti) v tých prípadoch, kedy vie načrtnúť graf funkcie  $y = f(x)$ , resp.  $x = f(y)$ ,
  - $ax + by + c * 0$ ,
- riešiť kontextové (*slovné*) úlohy vedúce k nerovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania.

## 2 FUNKCIE

### 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

#### Obsah

#### Pojmy:

premenná (veľičina), “daná premenná je funkciou inej premennej”, funkcia, postupnosť, argument, funkčná hodnota, ( $n$ -tý) člen postupnosti, definičný obor a obor hodnôt funkcie, graf funkcie, rastúca, klesajúca, monotónna funkcia (postupnosť), maximum (minimum) funkcie (postupnosti), lokálne maximum a minimum funkcie, zhora (zdola) ohraničená funkcia (postupnosť), ohraničená funkcia (postupnosť), horné (dolné) ohraničenie, konštantná, prostá, **párna a nepárna**, inverzná, zložená, periodická funkcia, rekurentný vzťah, postupnosť daná rekurentne.

#### Vlastnosti a vzťahy:

- Rastúca (klesajúca) funkcia je prostá,
- k prostej funkcii existuje inverzná funkcia,
- graf inverznej funkcie  $f^{-1}$  je súmerný s grafom funkcie  $f$  podľa priamky  $y = x$ ,
- $f(f^{-1}(x)) = x$ ,
- graf párnej funkcie  $f$  je súmerný podľa osi  $y$ ,
- graf nepárnej funkcie  $f$  je súmerný podľa bodu  $[0, 0]$ .

#### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

#### Žiak vie:

- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či niektorá z dvoch daných premenných veličín je funkciou druhej z nich a túto závislosť vyjadriť, ak je to možné urobiť pomocou predpisov funkcií, ktoré pozná,



- z daného grafu funkcie (postupnosti)
  - určiť približne
    - jej extrémny,
    - intervaly, na ktorých rastie (klesá),
  - zistiť, či je zdola (zhora) ohraničená, párna, nepárna,
- nájsť definičný obor danej funkcie, resp. rozhodnúť, či dané číslo patrí do definičného oboru danej funkcie (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- rozhodnúť, či dané číslo patrí do oboru hodnôt danej funkcie (pozri 1.4 Rovnice a nerovnice),
- nájsť funkčnú hodnotu funkcie v danom bode, určiť jej priesečníky so súradnicovými osami, nájsť priesečníky grafov dvoch funkcií (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- v prípade konštantnej funkcie a funkcií  $ax + b$ ,  $ax^2 + bx + c$ ,  $\frac{ax + b}{cx + d}$ ,  $x^a$ ,  $a^x$ ,  $\log_a x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,

$\operatorname{tg} x$

- určiť na danom intervale ich obor hodnôt,
- určiť intervaly, na ktorých sú tieto funkcie rastúce, resp. klesajúce,
- načrtnúť ich grafy,
- nájsť ich najväčšie, resp. najmenšie hodnoty na danom intervale  $\langle a, b \rangle$ ,
- rozhodnúť, ktoré z nich sú na danom intervale  $I$ 
  - prosté,
  - zhora (zdola) ohraničené,
  - párne, nepárne,
- načrtnúť grafy funkcií
  - $|ax + b|$ ,
  - $a + f(x)$ ,  $f(a + x)$ ,  $-f(x)$ ,  $|f(x)|$ ,  $a \cdot f(x)$ , ak pozná graf funkcie  $f$  a opísať, ako vznikne uvedený graf z grafu funkcie  $f$ ,
- načrtnúť graf inverznej funkcie  $f^{-1}$ , ak pozná graf prostej funkcie  $f$ ,
- nájsť inverzné funkcie k funkciám  $ax + b$ ,  $\frac{ax + b}{cx + d}$ ,  $x^a$ ,  $a^x$ ,  $\log_a x$ ,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o existencii riešenia rovnice  $f(x) = 0$  (resp.  $f(x) = a$ ), pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie  $f$ ,
- graficky znázorniť na číselnej osi množinu riešení nerovnice  $f(x) * a$ , kde  $*$  je jeden zo symbolov  $<, \leq, \geq, >$ , pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie  $f$ ,
- nájsť všetky riešenia nerovnice  $f(x) * a$ , pokiaľ vie riešiť rovnicu  $f(x) = a$  a súčasne vie načrtnúť graf funkcie  $f$ ,
- vypočítať hodnotu daného člena postupnosti danej jednoduchým rekurentným vzťahom.

## 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť

### Obsah

#### Pojmy:

lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť, smernica priamky, diferenciacia aritmetickej postupnosti, vrchol paraboly.

#### Vlastnosti a vzťahy:

- Grafom lineárnej (kvadratickej) funkcie je priamka (parabola),
- lineárna (kvadratická) funkcia je jednoznačne určená funkčnými hodnotami v 2 (3) bodoch,

- vzťah medzi koeficientom pri lineárnom člene a rastom, resp. klesaním lineárnej funkcie,
- vzťah medzi diferenciou aritmetickej postupnosti a jej rastom, resp. klesaním,
- kvadratická funkcia má na  $R$  jediný globálny extrém, minimum v prípade kladného koeficientu pri kvadratickom člene, maximum v opačnom prípade,
- parabola (t.j. graf kvadratickej funkcie) je súmerná podľa rovnobežky s osou  $y$ , prechádzajúcej vrcholom paraboly.

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: (pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)

- riešiť lineárne a kvadratické rovnice a nerovnice (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy), špeciálne vie nájsť priesečníky grafov 2 lineárnych (resp. 2 kvadratických) funkcií alebo lineárnej a kvadratickej funkcie,
- nájsť predpis lineárnej (alebo konštantnej) funkcie, ak pozná
  - hodnoty v 2 bodoch,
  - hodnotu v 1 bode a smernicu grafu tejto funkcie,
- nájsť predpis kvadratickej funkcie, ak pozná
  - jej hodnoty v 3 vhodne zvolených bodoch,
  - vrchol jej grafu a hodnotu v ďalšom bode,
- nájsť intervaly, na ktorých je daná lineárna alebo kvadratická funkcia rastúca, resp. klesajúca,
- nájsť, pokiaľ existuje, najväčšiu a najmenšiu hodnotu kvadratickej a lineárnej funkcie na danom intervale, špeciálne vie nájsť vrchol grafu kvadratickej funkcie, ak pozná jej predpis,
- určiť hodnotu ľubovoľného člena aritmetickej postupnosti, ak pozná
  - jeden jej člen a diferenciu,
  - dva rôzne členy,
- pre aritmetickú postupnosť (danú explicitne) napísať zodpovedajúci rekurentný vzťah,
- nájsť súčet  $n$  (pre konkrétne  $n$ ) za sebou nasledujúcich členov danej aritmetickej postupnosti.

## 2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia

### Obsah

Pojmy:

mocnina, mocnina s prirodzeným, celočíselným a racionálnym exponentom,  $n$ -tá odmocnina, polynóm, mnohočlen, mocninová funkcia, koeficient pri  $n$ -tej mocnine (v polynomickej funkcii), exponent, lineárna lomená funkcia, asymptoty grafu lineárnej lomenej funkcie.

Vlastnosti a vzťahy:

- Polynóm stupňa  $n$  má najviac  $n$  rôznych reálnych koreňov,
- polynóm nepárneho stupňa má aspoň jeden reálny koreň,
- $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$ ,  $(x^r)^s = x^{rs}$ ,  $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$ ,  $(xy)^r = x^r \cdot y^r$ ,  $r, s \in Z, Q$ ,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$ ,  $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$ ,  $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ , pre  $x, y \geq 0$ ,  $m, n \in N$ .

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: (pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)

- použiť rovnosti z časti Vlastnosti a vzťahy pri úpravách výrazov (pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- riešiť rovnice a nerovnice s polynomickými, mocninovými a lineárnymi lomenými funkciami (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),

- schematicky načrtnúť a porovnať grafy funkcií  $y = x^n$  pre rôzne hodnoty  $n \in \mathbb{Z}$  na intervaloch  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, \infty)$ ,
- nájsť rovnice asymptot grafu lineárnej lomenej funkcie a načrtnúť graf tejto funkcie,
- nájsť intervaly, na ktorých je lineárna lomená funkcia rastúca, resp. klesajúca a nájsť k nej inverznú funkciu.

## 2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

### Obsah

#### Pojmy:

exponenciálna a logaritmická funkcia, základ exponenciálnej a logaritmickkej funkcie, logaritmus, dekadický logaritmus, číslo  $e$  a prirodzený logaritmus, geometrická postupnosť, kvocient geometrickej postupnosti.

#### Vlastnosti a vzťahy:

- $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ ,  $(a^r)^s = a^{rs}$ , pre  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ ,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ , pre  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $\log_a r + \log_a s = \log_a rs$ ,  $\log_a r - \log_a s = \log_a \frac{r}{s}$ , pre  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $r, s > 0$ ,
- $\log_a (r^s) = s \log_a r$ , pre  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $r > 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,
- $a^{\log_a x} = x$ , pre  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ .

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: (pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)

(exponenciálna funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úprave výrazov (pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- riešiť exponenciálne rovnice a nerovnice (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie  $a^x$  v závislosti od čísla  $a$  a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho “význačných” bodov (t.j.  $[0, 1]$ ,  $[1, a]$ ),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola funkcie  $a^x$  na danom intervale,
- vyjadriť  $n$ -tý člen geometrickej postupnosti (pre konkrétne  $n$ ) pomocou jej prvého (alebo iného než  $n$ -tého) člena a kvocientu  $q$ ,
- nájsť súčet  $n$  za sebou nasledujúcich členov geometrickej postupnosti (pre konkrétne  $n$ ),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní geometrickej postupnosti v závislosti od jej prvého člena a kvocientu,

(logaritmická funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úpravách výrazov (pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- riešiť logaritmické rovnice a nerovnice (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie  $\log_a x$  v závislosti od čísla  $a$  a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho “význačných” bodov (t.j.  $[1, 0]$ ,  $[a, 1]$ ),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola logaritmickkej funkcie na danom intervale,
- vyriešiť jednoduché príklady na výpočet úrokov.

## 2.5 Goniometrické funkcie

### Obsah

#### Pojmy:

$\pi$ , goniometrická funkcia, sínus, kosínus, tangens, (najmenšia) perióda, jednotková kružnica, oblúčková miera, stupňová miera, uhol základnej veľkosti.

#### Vlastnosti a vzťahy:

- Hodnoty goniometrických funkcií pre uhly  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ ,
- vzťahy pre sínus a kosínus dvojnásobného uhla:  
 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ ,  $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ,
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ,  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ ,  
 $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ,  $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ,  $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ ,  
 $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ ,  $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ ,
- graf funkcie kosínus vznikne posunutím grafu funkcie sínus,
- periodickosť a najmenšie periódy jednotlivých goniometrických funkcií.

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: (pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úprave goniometrických výrazov (pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- nájsť pomocou kalkulačky riešenie rovnice  $f(x) = a$ , kde  $f$  je goniometrická funkcia, a to aj v prípade, že na kalkulačne niektoré goniometrické alebo inverzné goniometrické funkcie nie sú (pozri tiež 1.2 Čísla, premenné, výrazy),
- riešiť goniometrické rovnice a nerovnice (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- vyjadriť hodnoty goniometrických funkcií pre uhly  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ako pomery strán pravouhlého trojuholníka,
- použiť goniometrické funkcie pri výpočte prvkov pravouhlého trojuholníka (pozri tiež 3.1 Základné rovinné útvary),
- vyjadriť (na základe znalosti súmerností a periodickosti grafov goniometrických funkcií)  $\sin\alpha$ ,  $\cos\alpha$ ,  $\operatorname{tg}\alpha$  pre  $\alpha \in R$  ako sínus, kosínus alebo tangens vhodného uhla  $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,
- nájsť hodnoty všetkých goniometrických funkcií pre daný argument, ak pre tento argument pozná hodnotu aspoň jednej z nich,
- načrtnúť grafy funkcií  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ , určiť hodnoty v bodoch  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ , určiť najmenšie periódy týchto grafov,
- určiť podintervaly daného ohraničeného intervalu, na ktorých sú funkcie  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  rastúce, resp. klesajúce,
- rozhodnúť o ohraničenosti funkcie  $\operatorname{tg} x$  na danom intervale,
- načrtnúť grafy funkcií  $k(f(x))$ ,  $f(kx)$ ,  $f(ax + b)$ ,  $f(x) + a$ , kde  $k, a, b \in R$  a  $f$  je niektorá z goniometrických funkcií, určiť priesečníky týchto funkcií s  $x$ -ovou osou a ich periódu a v prípade  $f(x) = \sin x$  alebo  $f(x) = \cos x$  aj najmenšie a najväčšie hodnoty.

## 3 PLANIMETRIA

### 3. 1 Základné rovinné útvary

#### Obsah

#### Pojmy:

##### a) Lineárne útvary

bod, priamka, polpriamka, úsečka, stred úsečky, deliaci pomer, polrovina, rovnobežné a rôznobežné priamky, uhol (ostrý, pravý, priamy, tupý), susedné, vrcholové, súhlasné a striedavé uhly, os úsečky, os uhla, uhol dvoch priamok, kolmé priamky, kolmica, vzdialenosť (dvoch bodov, bodu od priamky, rovnobežných priamok).

##### b) Kružnica a kruh

stred, polomer (ako číslo i ako úsečka), priemer, tetiva, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica a nesečnica, stredový a obvodový uhol, obvod kruhu a dĺžka kružnicového oblúka, kruhový výsek a odsek, medzikružie, obsah kruhu a kruhového výseku, spoločné (vonkajšie, vnútorné) dotyčnice dvoch kružníc.

##### c) Trojuholník

trojuholník (ostrouhlý, pravouhlý, tupouhlý, rovnoramenný a rovnostranný trojuholník), vrchol, strana (ako vzdialenosť, ako úsečka), výška (ako vzdialenosť, ako úsečka i ako priamka), uhol, ťažnica, ťažisko, stredná priečka, kružnica trojuholníku opísaná, kružnica do trojuholníka vpísaná, obvod a plošný obsah trojuholníka, trojuholníková nerovnosť, Pytagorova veta, Euklidove vety, sínusová a kosínusová veta.

##### d) Štvoruholníky a mnohoúhelníky

vrchol, strana (ako vzdialenosť, ako úsečka), uhlopriečka, uhol, konvexný štvoruholník, rovnobežník, kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec, lichobežník, rovnoramenný lichobežník, základňa a rameno lichobežníka, výška rovnobežníka a lichobežníka, plošný obsah rovnobežníka a lichobežníka, konvexné, nekonvexné a pravidelné mnohoúhelníky, obsah mnohoúhelníka.

#### Vlastnosti a vzťahy:

##### a) Lineárne útvary

- Súhlasné uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- striedavé uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- súčet susedných uhlov je  $180^\circ$ ,
- vrcholové uhly sú rovnaké.

##### b) Trojuholník

- Trojuholníková nerovnosť,
- súčet vnútorných uhlov trojuholníka,
- oproti väčšej (menšej) strane leží väčší (menší) uhol, oproti rovnakým stranám ležia rovnaké uhly,
- delenie ťažníc ťažiskom,
- priesečník osí strán je stred opísanej kružnice, priesečník osí uhlov je stred vpísanej kružnice,
- vyjadrenie obsahu trojuholníka pomocou
  - dĺžky strany a k nej príslušnej výšky,
  - dĺžky dvoch strán a sínusu uhla týmito stranami zovretého,
- Pytagorova veta, goniometria pravouhlého trojuholníka (pozri 2.5. Goniometrické funkcie),
- vyjadrenie kosínusov uhlov trojuholníka pomocou dĺžok strán (kosínusová veta),
- $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$ ,  $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}$ ,  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}$  (sínusová veta),
- zhodné a podobné trojuholníky, vety o zhodnosti (sss, sus, usu, Ssu) a podobnosti (sss, sus, uu) trojuholníkov, Euklidove vety,

- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch trojuholníkov a
  - dĺžkami odpovedajúcich si úsečiek,
  - veľkosťami odpovedajúcich si uhlov,
  - ich plošnými obsahmi.

#### c) Kružnica a kruh

- Kružnica je jednoznačne určená stredom a polomerom, resp. tromi svojimi bodmi,
- žiadne tri body kružnice neležia na priamke,
- kolmosť dotyčnice k príslušnému polomeru kružnice,
- Tálesova veta, vzťah medzi stredovým uhlom a obvodovými uhlami príslušnými k danej tetive,
- závislosť vzájomnej polohy kružnice a priamky na polomere kružnice a vzdialenosti jej stredy od priamky,
- dotykový bod dvoch kružníc leží na spojnici stredov kružníc, závislosť vzájomnej polohy dvoch kružníc od vzdialenosti stredov kružníc a ich polomerov,
- vzťahy pre výpočet obvodu a obsahu kruhu, dĺžky kružnicového oblúka a obsahu kruhového výseku.

#### d) Štvoruholníky a mnohoúholníky

- Rovnobežnosť a rovnaká veľkosť protíahlých strán rovnobežníka,
- rozpoľovanie uhlopriečok v rovnobežníku,
- rovnosť protíahlých vnútorných uhlov v rovnobežníku,
- súčet susedných uhlov rovnobežníka,
- súčet vnútorných uhlov lichobežníka priľahlých k jeho ramenu,
- uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a rozpoľujú vnútorné uhly,
- zhodnosť uhlopriečok obdĺžnika a štvorca,
- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- pravidelnému  $n$ -uholníku sa dá vpísať a opísať kružnica,
- v rovnoramennom lichobežníku sú rovnaké uhlopriečky a rovnaké uhly pri základni,
- obsah rovnobežníka vyjadrený pomocou strany a príslušnej výšky, resp. pomocou susedných strán a uhla medzi nimi,
- obsah lichobežníka vyjadrený pomocou výšky a veľkosti základní.

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- približne vypočítať obvod a obsah narysovaných trojuholníkov,  $n$ -uholníkov, kruhov a ich častí,
- vypočítať v trojuholníku, jednoznačne určenom jeho stranami, resp. stranami a uhlami, zvyšné strany a uhly, dĺžky ťažníc, výšok, obvod a obsah,
- rozhodnúť, či sú dva trojuholníky zhodné alebo podobné,
- vlastnosti zhodnosti a podobnosti použiť vo výpočtoch,
- vypočítať obvod a obsah kruhu a kruhového výseku,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
  - priamky a kružnice,
  - dvoch kružníc, ak pozná ich polomery a vzdialenosť stredov,
- vypočítať plošný obsah rovnobežníka, lichobežníka, resp. rozkladom na trojuholníky aj obsah iných mnohoúholníkov,
- vypočítať uhol medzi uhlopriečkami, resp. medzi uhlopriečkou a stranou, v pravidelnom mnohoúholníku.

## 3.2 Analytická geometria v rovine

### Obsah

#### Pojmy:

(karteziánska) súradnicová sústava na priamke (číselná os) a v rovine, súradnice bodu, všeobecná rovnica priamky, smernica priamky, smernicový tvar rovnice priamky, rovnica kružnice, vektor, umiestnenie vektora, súradnice vektora, vektor opačný k danému vektoru, nulový vektor, súčet a rozdiel dvoch vektorov, násobok vektora číslom, dĺžka vektora, skalárny súčin vektorov, parametrické rovnice priamky, smerový a normálový vektor priamky.

#### Vlastnosti a vzťahy:

- Vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc,
- vzťah medzi smernicami dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- vzťah medzi koeficientmi všeobecných rovníc dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- aspoň jeden vzťah alebo postup pre výpočet
  - uhla dvoch priamok (*napr. pomocou skalárneho súčinu, kosínusovej vety alebo smerníc*),
  - vzdialenosti bodu od priamky,
- geometrická interpretácia súčtu dvoch vektorov a násobku vektora reálnym číslom a ich vyjadrenie pomocou súradníc daných vektorov,
- body  $A$ ,  $B$  a  $C$  ležia na jednej priamke, ak jeden z vektorov  $B - A$  a  $C - A$  je násobkom druhého,
- vzťah medzi smerovými vektormi dvoch rovnobežných priamok,
- vzdialenosť dvoch bodov ako dĺžka vektora,
- kolmosť dvoch priamok a jej vzťah so skalárnym súčinom ich smerových vektorov,
- vyjadrenie skalárneho súčinu vektorov pomocou dĺžok vektorov a kosínusu ich uhla (resp. vyjadrenie kosínusu uhla dvoch vektorov pomocou ich skalárneho súčinu a ich dĺžok), vyjadrenie skalárneho súčinu vektorov pomocou ich súradníc,
- vzťah medzi koeficientmi všeobecnej rovnice priamky a normálovým vektorom priamky.

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

#### Žiak vie:

- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice, a určiť súradnice daných bodov,
- vypočítať súradnice stredu úsečky, resp. bodu, ktorý úsečku rozdeľuje v danom pomere,
- napísať analytické vyjadrenie priamky
  - prechádzajúcej dvoma danými bodmi,
  - daným bodom rovnobežne s danou priamkou,
  - prechádzajúcej daným bodom kolmo na danú priamku,
- určiť vzájomnú polohu dvoch priamok (ak sú dané ich rovnice) a nájsť súradnice ich prípadného priesečníka,
- vypočítať
  - vzdialenosť dvoch bodov,
  - vzdialenosť bodu od priamky,
  - vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok,
  - obsah trojuholníka určeného jeho vrcholmi,
  - uhol dvoch priamok,
- napísať rovnicu kružnice
  - ak pozná jej stred a polomer,
  - v tvare  $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ , ak pozná tri body, ktorými kružnica prechádza,
- určiť z rovnice kružnice jej stred a polomer,

- opísať v súradnicovej sústave pomocou rovníc a nerovníc úsečku, kružnicu, polrovinu a kruh,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
  - priamky a kružnice,
  - dvoch kružníc,
 ak pozná ich rovnice,
- pri riešení planimetrických úloh používať analytickú metódu, t.j. vie
  - vhodne si zvoliť súradnicovú sústavu a algebraicky spracovať zadanie,
  - pomocou vedomostí z algebry a poznatkov o vektoroch algebraicky vyriešiť úlohu,
  - algebraický výsledok „preložiť“ do geometrického kontextu úlohy.

### 3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie

#### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- geometricky opísať, načrtnúť a nájsť (v danej alebo vhodne zvolenej súradnicovej sústave) analytické vyjadrenie množiny bodov s konštantnou vzdialenosťou od
  - bodu,
  - priamky,
  - kružnice,
- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov,
  - z ktorých vidieť danú úsečku pod daným uhlom,
  - ktoré majú rovnakú vzdialenosť od
    - dvoch bodov,
    - dvoch rovnobežných priamok,
    - dvoch rôznobežných priamok,
- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov, ktoré majú
  - od daného bodu vzdialenosť menšiu (väčšiu) ako dané kladné číslo,
  - od danej priamky vzdialenosť menšiu (väčšiu) ako dané kladné číslo,
  - od jedného bodu väčšiu vzdialenosť ako od druhého bodu,
  - od jednej danej priamky väčšiu vzdialenosť ako od druhej danej priamky,
- znázorniť množinu bodov  $[x, y]$ , pre ktoré platí
  - $y * f(x)$ , kde  $*$  je jeden zo znakov  $<, \leq, \geq, >$  a  $f$  je predpis funkcie, ktorej graf vie žiak znázorniť (pozri 2.1 Funkcia a jej vlastnosti),
  - $ax + by + c * 0$ ,
 a v jednoduchých prípadoch aj množinu bodov  $[x, y]$ , ktorá je opísaná sústavou dvoch z predchádzajúcich nerovníc (pozri tiež 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- tieto množiny bodov použiť pri riešení jednoduchých konštrukčných úloh (pozri 3.5 Konštrukčné úlohy).

### 3.4 Zhodné a podobné zobrazenia

#### Obsah

Pojmy:

zhodné zobrazenie, osová súmernosť, os súmernosti, posunutie, stredová súmernosť, stred súmernosti, otočenie, stred otočenia, orientovaný uhol a jeho veľkosti, uhol otočenia, osovo a stredovo súmerný útvar, podobné zobrazenie, pomer podobnosti, rovnoľahlosť, stred a koeficient rovnoľahlosti, samodružný bod.

Vlastnosti a vzťahy:

- Stredová súmernosť je jednoznačne určená stredom súmernosti, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,



- osová súmernosť je jednoznačne určená osou súmernosti, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- otočenie je jednoznačne určené stredom a uhlom otáčania,
- posunutie je jednoznačne určené vektorom posunutia, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- vzťah medzi orientovaným uhlom a jeho veľkosťami,
- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- nech  $A, B$  sú dva osovo súmerné body podľa priamky  $p$ , potom  $AB$  je kolmá na  $p$  a stred  $AB$  leží na  $p$ ,
- priamka a jej obraz v posunutí sú rovnobežné,
- rovnoláhosť je jednoznačne určená stredom a koeficientom rovnoláhlosti, dvoma vhodne zvolenými dvojicami odpovedajúcich si bodov,
- dve rovnolahlé priamky sú rovnobežné,
- každé dve nerovnaké rovnobežné úsečky sú rovnolahlé (dvoma spôsobmi),
- každé dve kružnice s rôznym polomerom sú si podobné (sú rovnolahlé),
- vonkajšie (vnútorné) spoločné dotyčnice dvoch kružníc sa pretínajú v strede rovnoláhlosti,
- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch útvarov a
  - dĺžkami zodpovedajúcich si úsečiek,
  - veľkosťami zodpovedajúcich si uhlov,
  - ich plošnými obsahmi.

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zobrazit' daný bod (útvár, graf) v danom zhodnom alebo podobnom zobrazení,
- rozhodnúť, či je daný útvar osovo (stredovo) súmerný,
- napísať súradnice bodu (rovnicu priamky, úsečky, kružnice), ktorý je obrazom daného bodu (danej priamky, úsečky, kružnice)
  - v súmernosti podľa začiatku súradnej sústavy,
  - v súmernosti podľa niektorej súradnej osi alebo podľa priamky  $y = x$ ,
  - v posunutí,
- zostrojiť
  - stredy rovnoláhlosti dvoch daných kružníc,
  - obraz daného útvaru v danom zhodnom zobrazení alebo rovnoláhlosti, resp. útvar podobný s daným útvarom, pri danom pomere podobnosti.

## 3.5 Konštrukčné úlohy

### Obsah

Pojmy:

rozbor, náčrt, konštrukcia, postup konštrukcie.

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zdôvodniť postup konštrukcie, t. j. urobiť rozbor jednoduchých konštrukčných úloh, pričom vie použiť
  - nasledujúce základné konštrukcie (na ktoré sa môže pri opise postupu zložitejších konštrukčných úloh odvolávať bez toho, aby ich podrobne rozpisoval):
    - rovnobežku s danou priamkou daným bodom,
    - rovnobežku s danou priamkou v predpísanej vzdialenosti,

- os úsečky, os uhla,
  - priamku, ktorá prechádza daným bodom a zvierá s danou priamkou daný uhol,
  - úsečku dĺžky  $\frac{ab}{c}$  (pomocou podobnosti), kde  $a, b, c$  sú dĺžky narysovaných úsečiek,
  - rozdeliť úsečku v danom pomere,
  - trojuholník určený:
    - tromi stranami,
    - dvoma stranami a uhlom,
    - dvoma uhlami a stranou,
  - kružnicu
    - trojuholníku opísanú,
    - do trojuholníka vpísanú,
  - dotyčnicu kružnice
    - v danom bode kružnice,
    - z daného bodu ležiaceho mimo kružnice,
    - rovnobežnú s danou priamkou,
  - stredy rovnôľahlosti dvoch kružníc a spoločné dotyčnice dvoch kružníc,
  - obraz daného bodu, úsečky, priamky, kružnice v danom zhodnom zobrazení, **resp. v rovnôľahlosti** (pozri 3. 4 Zhodné a podobné zobrazenia),
  - množiny bodov daných vlastností, uvedené v prvej a druhej odrážke v 3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie,
  - množiny bodov daných vlastností,
- pri kreslení náčrtu pri rozbere úlohy rozlíšiť jednotlivé možnosti zadania (napr. “výška leží v trojuholníku” a “výška je mimo trojuholníka”),
  - na základe vykonaného (daného) rozboru napísať postup konštrukcie,
  - uskutočniť konštrukciu danú opisom,
  - určiť počet riešení v prípade číselne zadaných úloh.

## 4 STEREOMETRIA

### 4.1 Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny

#### Obsah

##### Pojmy:

premietanie (voľné rovnobežné premietanie), priemet **bod**, priestorového útvaru do roviny.

##### Vlastnosti a vzťahy:

- Voľné rovnobežné premietanie zachováva deliaci pomer a rovnobežnosť.

#### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

##### Žiak vie:

- použiť vlastnosti voľného rovnobežného premietania pri zobrazovaní kocky, pravidelných hranolov.

### 4.2 Súradnicová sústava v priestore

#### Obsah

##### Pojmy:

(karteziánska) sústava súradníc v priestore, bod a jeho súradnice, vzdialenosť bodov.

*Vlastnosti a vzťahy:*

- Vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc.

### **Požiadavky na vedomosti a zručnosti**

Žiak vie:

- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice, a určiť súradnice daných bodov,
- určiť súradnice stredu úsečky,
- špeciálne vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave opísať vrcholy daného kvádra.

## **4.3 Lineárne útvary v priestore – polohové úlohy**

### **Obsah**

*Pojmy:*

bod, priamka a rovina v priestore, rovnobežné, rôznobežné a mimobežné priamky, rovnobežnosť a rôznobežnosť priamky a roviny, rovnobežné a rôznobežné roviny, priesečnica dvoch rovín, rez telesa rovinou.

*Vlastnosti a vzťahy:*

- Rovnobežné (rôznobežné) priamky ležia v jednej rovine, mimobežné priamky neležia v jednej rovine,
- priesečnice roviny s dvoma rovnobežnými rovinami sú rovnobežné.

### **Požiadavky na vedomosti a zručnosti**

Žiak vie:

- opísať možnosti pre vzájomné polohy ľubovoľných dvoch lineárnych útvarov,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe dvoch lineárnych útvarov pomocou ich obrazu vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- zostrojiť vo voľnom rovnobežnom priemete jednoduchého telesa (kocky, resp. hranola) priesečník priamky (určenej dvoma bodmi ležiacimi v rovinách stien kocky, resp. hranola) s rovinou steny daného telesa,
- zostrojiť rovinný rez kocky, kvádra rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa.

## **4.4 Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy**

### **Obsah**

*Pojmy:*

uhol dvoch priamok, kolmost' priamok a rovín, priamka kolmá k rovine, uhol dvoch rovín, kolmý priemet bodu a priamky do roviny, vzdialenosť dvoch lineárnych útvarov (dvoch bodov, bodu od roviny, bodu od priamky, vzdialenosť rovnobežných priamok, priamky a roviny s ňou rovnobežnej, vzdialenosť rovnobežných rovín), uhol priamky s rovinou.

### **Požiadavky na vedomosti a zručnosti**

Žiak vie:

- na zobrazených telesách označiť
  - úsečky, ktorých skutočná veľkosť predstavuje vzdialenosť daných lineárnych útvarov,
  - uhly, ktorých skutočná veľkosť predstavuje uhol daných lineárnych útvarov.

## 4.5 Telesá

### Obsah

#### Pojmy:

teleso, mnohosten, vrchol, hrana, stena, kocka, sieť kocky, hranol, kolmý a pravidelný hranol, kváder, rovnobežnosten, ihlan, štvorsten, pravidelný štvorsten, podstava, výšky v štvorstene, guľa, valec, kužeľ, objemy a povrchy telies.

#### Vlastnosti a vzťahy:

- Vzťahy pre výpočty objemov a povrchov telies.

### Požiadavky na vedomosti a zručnosti

#### Žiak vie:

- rozhodnúť, či daná sieť je sieťou telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- načrtnúť sieť telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- riešiť úlohy, ktorých súčasťou je výpočet objemu, resp. povrchu kocky, kvádra, pravidelného kolmého hranola, pravidelného ihlana, gule, valca, kužeľa a vie pri tom nájsť a aktívne použiť vzťahy pre výpočet objemov a povrchov telies potrebné pre vyriešenie úlohy.

## 5 KOMBINATORIKA, PRAVDEPODOBNOŠŤ A ŠTATISTIKA

### 5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

#### Obsah

#### Pojmy:

(kombinatorické) pravidlo súčtu, (kombinatorické) pravidlo súčinu, permutácie a **permutácie s opakovaním**, variácie a variácie s opakovaním, kombinácie, faktoriál, kombinačné číslo, Pascalov trojuholník, pravdepodobnosť, doplnková pravdepodobnosť, „**geometrická**“ pravdepodobnosť, náhodný jav, nezávislé javy.

#### Vlastnosti a vzťahy:

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ,  $0! = 1$ ,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $C_k(n) = \binom{n}{k}$ ,  $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ ,  $P_n = n!$ ,  $V_k' = n^k$ ,  $P_{n_1, n_2, \dots, n_k}' = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ,  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ ,
- pre pravdepodobnosť  $P$  udalosti  $A$  platí  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,
- $P(A) + P(A') = 1$ , kde  $A'$  je doplnková udalosť k udalosti  $A$ ,
- pravdepodobnosť istej udalosti je 1,
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , ak  $A, B$  sú nezávislé javy,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

**Požiadavky na vedomosti a zručnosti**

Žiak vie:

- riešiť jednoduché kombinatorické úlohy
  - vypisovaním všetkých možností, pričom
    - vie vytvoriť systém (strom logických možností) na vypisovanie všetkých možností (ak sa v tomto strome vyskytujú niektoré možnosti viackrát, vie určiť násobnosť ich výskytu),
    - dokáže objaviť podstatu daného systému a pokračovať vo vypisovaní všetkých možností,
    - na základe vytvoreného systému vypisovania všetkých možností určiť (pri väčšom počte možností algebraickým spracovaním) počet všetkých možností,
  - použitím kombinatorického pravidla súčtu a súčinu,
  - využitím vzťahov pre počet kombinácií, variácií, variácií s opakovaním, permutácií a permutácií s opakovaním,
- použiť pri úprave výrazov rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy (pozri 1.4 Čísla, premenné, výrazy)*,
- rozhodnúť
  - o závislosti javov  $A$ ,  $B$ , ak pozná  $P(A)$ ,  $P(B)$  a  $P(A \cap B)$ ,
  - v jednoduchých prípadoch o správnosti použitia rovnosti  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ,
- riešiť úlohy na pravdepodobnosť, založené na
  - hľadaní pomeru všetkých priaznivých a všetkých možností, resp. všetkých nepriaznivých a všetkých priaznivých možností, ak vie tieto počty určiť riešením jednoduchých kombinatorických úloh,
  - doplnkovej pravdepodobnosti,
  - využitií „geometrickej“ pravdepodobnosti.

**5.2 Štatistika****Obsah***Pojmy:*

diagram – graf (stĺpcový, obrázkový, kruhový, lomený, spojitý, histogram), základný súbor, výberový súbor, rozdelenie, modus, medián, aritmetický priemer (aj viac ako dvoch čísel), stredná hodnota, smerodajná odchýlka, rozptyl, triedenie.

*Vlastnosti a vzťahy:*

- Vzťah pre výpočet rozptylu.

**Požiadavky na vedomosti a zručnosti**

Žiak vie:

- vypočítať aritmetický priemer daných čísel,
- získavať informácie z rôznych tabuliek (napr. autobusová tabuľka) a diagramov,
- spracovať údaje do vhodných diagramov,
- zistiť v danom súbore modus, medián, strednú hodnotu, priemer,
- pomocou vhodného softvéru zistiť v danom súbore rozptyl, smerodajnú odchýlku a uviesť štatistickú interpretáciu získaných výsledkov,
- uviesť príklad súboru s požadovanými podmienkami na modus, medián, strednú hodnotu, priemer, rozptyl, smerodajnú odchýlku,
- znázorniť a vyhodnotiť namerané hodnoty,
- urobiť triedenie a znázorniť ho.

## **ÚPRAVY CIEĽOVÝCH POŽIADAVIEK Z MATEMATIKY PRE ŽIAKOV SO ZDRAVOTNÝM ZNEVÝHODNENÍM**

### **Žiaci so sluchovým postihnutím**

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

### **Žiaci so zrakovým postihnutím**

Úlohy, ktoré vyžadujú vizuálnu skúsenosť sa upravujú, nahrádzajú slovným opisom alebo vypúšťajú.

### **Žiaci s telesným postihnutím**

Konštrukčné úlohy sa nahrádzajú slovným opisom jednotlivých krokov konštrukcie (podľa druhu a stupňa telesného postihnutia).

### **Žiaci s vývinovými poruchami učenia alebo správania**

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiakom s vývinovou poruchou učenia – dyskalkúlia – neodporúčame konať maturitnú skúšku z matematiky.

### **Žiaci s narušenou komunikačnou schopnosťou**

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

### **Žiaci chorí a zdravotne oslabení**

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

### **Žiaci s pervazívnymi vývinovými poruchami (s autizmom)**

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.